L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov, On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, Volume 27, Issue 3, 355–364

DOI: https://doi.org/10.20537/vm170306

УДК 517.977

© *Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ[1]

Предложен подход к получению точных решений неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что если правая часть уравнения задает поверхность уровня для решения уравнения, то в рамках этого подхода поиск решений рассматриваемого неоднородного уравнения сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). В противном случае поиск решений уравнения приводит к решению системы ОДУ. Получение системы ОДУ опирается на наличие в рассматриваемом уравнении первых производных от искомой функции. Для уравнений в частных производных, которые явно не содержат первые производные искомой функции, предложена подстановка, позволяющая получить такие члены в уравнении. Чтобы свести исходное уравнение, содержащее первые производные от искомой функции, к системе ОДУ, рассматривается связанная с ним система двух уравнений в частных производных. Первое уравнение системы содержит в левой части частные производные только первого порядка, выбранные из исходного уравнения, в правой части — произвольную функцию, аргументом которой является искомая функция. Второе уравнение содержит члены исходного уравнения, не вошедшие в первое уравнение системы, и правую часть первого уравнения формируемой системы. Решение исходного уравнения сводится к поиску решения первого уравнения полученной системы уравнений в частных производных, обращающего в тождество второе уравнение системы. Такое решение удается найти, используя расширенную систему уравнений характеристик для первого уравнения и произвол в выборе функции из правой части этого уравнения. Описанный подход применен для получения некоторых точных решений уравнения Пуассона, уравнения Монжа–Ампера и уравнения конвекции–диффузии.

Ключевые слова: неоднородные уравнения в частных производных, точные решения, ОДУ, системы ОДУ.

DOI: 10.20537/vm170306

Введение

Известно достаточно много приближенных и точных методов решения отдельных классов неоднородных уравнений в частных производных (см., например, [1–4]). В данной статье для решения неоднородных уравнений в частных производных используется геометрический метод исследования нелинейных уравнений и систем в частных производных, развиваемый авторами [5–9], который позволяет в ряде случаев получать точные решения таких уравнений и систем, решать некоторые краевые задачи и задачи о примыкании течений разного типа [10].

В основу метода положен выбор таких независимых переменных, использование которых позволяет уравнения в частных производных порядка выше первого свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В новых независимых переменных решение нелинейного уравнения в частных производных выражается только через одну независимую переменную, которая, естественно, задает поверхность уровня решения. Иногда можно не искать поверхность уровня решения, а выбирать в качестве поверхности уровня известные функции [7].

Например, пусть задано нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных

$$F(\bar{x}, u, u_1, \ldots, u_n, u_{ij}, \ldots, u_{i_1, i_2, \ldots, i_m}) = f(\bar{x}) \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 15–16–1–10.

Здесь $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, x_i — независимые переменные, $u(\bar{x})$ — неизвестная функция, нижние индексы указывают на дифференцирование по соответствующим переменным.

Полагая, что $u = u(f(\bar{x}))$, приходим к зависимости

$$\sum_{l=1}^{k} A_l(u, u', u'', \ldots, u''^{\cdots\prime}) B_l(\bar{x}, f_i, f_{ij}, \ldots, f_{i_1, i_2, \ldots, i_m}) = f(\bar{x}), \tag{0.2}$$

где штрих обозначает дифференцирование по f.

Если

$$B_l(\bar{x}, f_i, f_{ij}, \ldots, f_{i_1, i_2, \ldots, i_m}) = g_l(f), \tag{0.3}$$

то решение уравнения (0.2) сводится к решению ОДУ

$$\sum_{l=1}^{k} A_l(u, u', u'' \ldots u''^{\cdots\prime}) g_l(f) = f,$$

решение уравнения (0.1) получается после подстановки в его решение $u = u(f)$ функции $f = f(\bar{x})$. Здесь, в отличие от общего случая, не требуется доказывать совместность системы (0.3), поскольку она совместна по способу ее получения.

В первой части работы данный подход демонстрируется для получения точных решений некоторых неоднородных уравнений.

Во второй части работы предлагается метод сведения исходного уравнения к системе ОДУ для получения его решений, когда для правой части уравнения не выполняются условия (0.3).

§ 1. Сведение неоднородного уравнения в частных производных к ОДУ

Рассматриваем уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z). \tag{1.1}$$

Полагаем, что $u = u(f(x, y, z))$, тогда $u_{xx} = u'' f_x^2 + u' f_{xx}$, $u_{yy} = u'' f_y^2 + u' f_{yy}$, $u_{zz} = u'' f_z^2 + u' f_{zz}$. Здесь и далее в этом параграфе штрих обозначает дифференцирование по переменной f, нижние индексы указывают на дифференцирование по соответствующим переменным. Подставив полученные выражения в уравнение (1.1), имеем $u''(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) + u'(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) = f$. Если $f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = f_1(f)$, $\quad f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = f_2(f)$, то, решив ОДУ

$$u'' f_1 + u' f_2 = f \tag{1.2}$$

и подставив в его решение $u(f)$ функцию $f(x, y, z)$, получим решение уравнения (1.1).

Отметим, что $f_1(f), f_2(f)$ — известные функции, которые получаются при подстановке функции f в соответствующие выражения $(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)$ и $(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$. Еще раз подчеркнем, что, поскольку в оба выражения подставляется одна и та же функция, а после подстановки f в данные выражения получаются некоторые функции, зависящие только от f, вопрос о совместности системы не стоит.

Пример 1. Пусть $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, тогда $f_1(f) = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 4f$, $f_2(f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 6$. Подставляя эти выражения $f_1(f)$ и $f_2(f)$ в уравнение (1.2), придем к ОДУ $4u''f + 6u' = f$, решая которое получаем $u = f^2/20 - 2\eta f^{(-1/2)}$, $\eta = \mathrm{const}$. В результате, как нетрудно проверить, решение уравнения (1.1), если $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, имеет вид $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2/20 - 2\eta/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пример 2. Пусть $f = \sin(ax + by + cz)$, тогда $f_1(f) = (a^2 + b^2 + c^2)(1 - f^2)$, $f_2(f) = -(a^2 + b^2 + c^2)f$. Решаем уравнение $(a^2 + b^2 + c^2)(u''(1 - f^2) - fu') = f$. После подстановки $f = \sin(ax + by + cz)$ в решение этого уравнения получаем точное решение уравнения (1.1):

$$u = \eta(ax + by + cz) - \sin(ax + by + cz)/(a^2 + b^2 + c^2), \quad \eta = \mathrm{const}.$$

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

Рассматриваем уравнение Монжа–Ампера [11]

$$w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x,y). \tag{1.3}$$

Полагаем, что $w = w(f)$, тогда $w_x = w' f_x$, $w_y = w' f_y$, $w_{xy} = w'' f_x f_y + w' f_{xy}$, $w_{xx} = w'' f_x^2 + w' f_{xx}$, $w_{yy} = w'' f_y^2 + w' f_{yy}$. Подставляя эти выражения в уравнение (1.3), получаем

$$w'' w' (2 f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{xx} - f_x^2 f_{yy}) - {w'}^2 (f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}) = f.$$

Если

$$2 f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{xx} - f_x^2 f_{yy} = f_1(f), \quad f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = f_2(f), \tag{1.4}$$

то решение уравнения (1.3) сводится к решению уравнения

$$w'' w' f_1 - {w'}^2 f_2 = f \tag{1.5}$$

и подстановке в $w(f)$ известной функции $f(x,y)$.

Пример 3. Аналогично предыдущему получим решение уравнения (1.3) для случая, когда $f = xy$ (см. [12]). Подставив такую функцию f в систему (1.4), получаем $f_1 = 2f$, $f_2 = 1$, и уравнение (1.5) приводится к виду $2 f w'' w' - {w'}^2 = f$. После его решения и подстановки $f = xy$ находим решение уравнения (1.3):

$$w = \int \sqrt{(\eta f + f \ln f)}\, df + M, \quad f = xy, \quad \eta = \text{const}, \quad M = \text{const}.$$

Рассматриваем уравнение фильтрации

$$p_t - \frac{1}{\gamma} p_x^2 - p p_{xx} = f(x,t).$$

Здесь γ — показатель адиабаты. Пусть $p = p(f)$, тогда $p_t = p' f_t$, $p_x = h' f_x$, $p_{xx} = p'' f_x^2 + p' f_{xx}$. Подставляя данные выражения в уравнение фильтрации, получаем уравнение

$$p' f_t - p p' f_{xx} - \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + p p''\right) f_x^2 = f(x,t).$$

Если $f_t = g(f)$, $f_x = g_1(f)$, $f_{xx} = g_2(f)$, то решение уравнения фильтрации сводится к решению ОДУ

$$p' g - p p' g_2 - \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + p p''\right) g_1^2 = f$$

и подстановке в полученное выражение $p = p(f)$ известной функции f. Пусть, например, $f(x,t) = \exp(kx + nt)$, $k = \text{const}$, $n = \text{const}$. Тогда $f_t = nf$, $f_x = kf$, $f_{xx} = k^2 f$, и решение уравнения фильтрации сводится к решению ОДУ

$$p' n - p p' k^2 - \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + p p''\right) k^2 f = 1.$$

§ 2. Сведение неоднородного уравнения в частных производных к системе ОДУ

Пусть правая часть уравнения (0.1) не удовлетворяет соотношению (0.3). Возможны два случая: уравнение содержит первые производные от неизвестной функции либо не содержит их.

В случае если уравнение не содержит первых производных от неизвестной функции u, сделаем в уравнении замену $u = af$, где f — правая часть уравнения (0.1), если она имеет отличные от нуля производные того же порядка, какой порядок исходного уравнения, или, в противном случае, $u = ag$, где функция g имеет такие производные. В результате получим уравнение для определения функции a, которое содержит производные первого порядка.

Таким образом, можно считать, что мы имеем уравнение в частных производных, содержащее члены, зависящие только от производных первого порядка. В этом случае поступаем так. Рассмотрим связанную с исходным уравнением систему двух уравнений в частных производных, построенную следующим образом. В первое уравнение системы выделим члены исходного уравнения, содержащие только производные первого порядка, и приравняем их к произвольной функции, зависящей от решения уравнения [7]. Оставшиеся члены системы отнесем ко второму уравнению. Затем получим условие совместности полученной переопределенной системы и поиск решений исходного уравнения сведем к отысканию решений системы ОДУ.

Чтобы получить условие совместности системы, выпишем систему уравнений характеристик для первого уравнения системы, которое по способу получения является уравнением в частных производных первого порядка. Получим для него расширенную систему характеристик, содержащую наивысшие производные такого порядка, каков порядок исходного уравнения (0.1) [5, 6, 11]. Потребуем, чтобы второе уравнение системы было первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик. Это требование мы сможем выполнить, так как в систему включена новая неизвестная функция [9].

Проиллюстрируем вышеизложенное на примерах.

Рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения фильтрации:

$$p_t - \frac{1}{\gamma}p_x^2 - pp_{xx} = f(x,t), \qquad p(0,x) = 0. \tag{2.1}$$

Утверждение 1. *Решение задачи* (2.1) *можно получить сведением уравнения фильтрации к системе ОДУ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим связанную с уравнением (2.1) систему уравнений

$$p_t - \frac{1}{\gamma}p_x^2 = b(p)f, \quad pp_{xx} = f(x,t)(b(p)-1). \tag{2.2}$$

Здесь $b(p)$ — пока произвольная функция. Очевидно, решение системы (2.2) обращает в тождество уравнение (2.1). Выпишем дифференциальные следствия первого уравнения системы (2.2), выразим производную p_{xx} из второго уравнения системы (2.2). В результате получим

$$\begin{gathered} p_{xx} = f(b-1)/p, \quad p_{xt} = b'fp_x + 2fp_x(b-1)/(p\gamma) + bf_x, \\ p_{tt} = b'fp_x^2/\gamma + 4fp_x^2(b-1)/(p\gamma^2) + 2bf_xp_x/\gamma + b'fp_t + bf_t, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по p.

Выпишем расширенную систему уравнений характеристик для первого уравнения системы (2.2), выбрав p в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристики, и потребуем, чтобы второе уравнение системы (2.2) было первым интегралом выписанной системы:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dp} = -\frac{2p_x}{\gamma(2bf - p_t)}, \quad \frac{dt}{dp} = \frac{1}{2bf - p_t}, \quad \frac{dp_x}{dp} = \frac{b'fp_x + bf_x}{2bf - p_t}, \\ \frac{dp_t}{dp} = \frac{b'fp_t + bf_t}{2bf - p_t}, \quad \frac{dp_{xx}}{dp} = -p_{xx}\left(\frac{dx}{dp}\right)_x - p_{xt}\left(\frac{dy}{dp}\right)_x + \left(\frac{b'fp_x + bf_x}{2bf - p_t}\right)_x, \\ \frac{dp_{xt}}{dp} = -p_{xx}\left(\frac{dx}{dp}\right)_t - p_{xt}\left(\frac{dy}{dp}\right)_t + \left(\frac{b'fp_x + bf_x}{2bf - p_t}\right)_t, \\ \frac{dp_{tt}}{dp} = -p_{xt}\left(\frac{dx}{dt}\right)_t - p_{tt}\left(\frac{dy}{dp}\right)_t + \left(\frac{b'fp_x + bf_x}{2bf - p_t}\right)_t, \\ f\frac{db}{dp} + (b-1)\left(f_x\frac{dx}{dp} + f_t\frac{dt}{dp}\right) - p_{xx} - p\frac{dp_{xx}}{dp} = 0, \quad 2bf - p_t \neq 0. \end{gathered}$$

Получили замкнутую систему ОДУ для определения функций $x(p)$, $t(p)$, $p_x(p)$, $p_t(p)$, $p_{xx}(p)$, $p_{xt}(p)$, $p_{tt}(p)$, $b(p)$. Чтобы получить поверхность, на которой лежат характеристики и которая удовлетворяет начальным условиям, зададим при $p=0$ $t(0,s)=0$, $x(0,s)=s$. Заметим, что соотношение $p=p(x(p,s),t(p,s))$ должно при заданных $x(p,s)$, $t(p,s)$ обращаться в тождество: $1=p_x x_p+p_t t_p$, $p_x x_s+p_t t_s=0$. Первое из этих соотношений выполняется тождественно в силу выписаных уравнений характеристик, второе будет выполняться тождественно на начальном многообразии, если $p_x(0,s)=0$. Полагая, что $p_t(0,s)=f(s,0)$, $p_{xx}(0,s)=0$, $p_{xt}(0,s)=f_x(s,0)$, $p_{tt}(0,s)=f_t(s,0)$, $b(0)=1$ (следовательно, $b'(0)=0$), будем иметь на начальном многообразии выполнение условий (2.2), (2.3). Решив расширенную систему уравнений характеристик вместе с условием, обеспечивающим совместность системы (2.2), определим $x(p,s)$, $t(p,s)$ [12]. Исключив s из этих соотношений, найдем решение $p=p(x,t)$ уравнения (2.1), что и требовалось доказать. □

Рассмотрим уравнение Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$.

Это уравнение не содержит производных первого порядка, поэтому положим, что $u(x,y)=f(x,y)a(x,y)$, и подставим в уравнение Пуассона. Получаем

$$f(a_{xx}+a_{yy})+a(f_{xx}+f_{yy})+2(f_x a_x+f_y a_y)=f. \tag{2.4}$$

Наряду с уравнением (2.4) рассмотрим систему уравнений

$$a(f_{xx}+f_{yy})+2(f_x a_x+f_y a_y)=B(a)f, \quad a_{xx}+a_{yy}=1-B(a). \tag{2.5}$$

Получаем дифференциальные следствия первого уравнения системы (2.5) и присоединяем к ним второе уравнение системы (2.5):

$$2(f_x a_{xx}+f_y a_{yx})=-2(f_{xx}a_x+f_{yx}a_y)+Bf_x+B'a_x f-a_x(f_{xx}+f_{yy})-a(f_{xxx}+f_{yyx}),$$

$$2(f_x a_{xy}+f_y a_{yy})=-2(f_{xy}a_x+f_{yy}a_y)+Bf_y+B'a_y f-a_y(f_{xx}+f_{yy})-a(f_{xxy}+f_{yyy}),$$

$$a_{xx}+a_{yy}=1-B(a).$$

Из полученной системы линейных алгебраических уравнений находим вторые производные функции $a(x,y)$ и требуем равенства третьих смешанных производных. Таким образом получаем условия совместности системы (2.5). Решение уравнения Пуассона сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка, а именно — первого уравнения системы (2.5).

Это эквивалентно решению расширенной системы характеристик для первого уравнения системы (2.5) при условии, что второе уравнение системы (2.5) является ее первым интегралом.

Пример 4. Рассмотрим пример, когда $f(x,y)=xy$. Тогда система (2.5) имеет вид $2(ya_x+xa_y)=Bxy$, $a_{xx}+a_{yy}=1-B$. Выпишем дифференциальные следствия первого уравнения и второе уравнение. Получим систему для определения вторых производных:

$$2(ya_{xx}+xa_{yx}=-2a_y+By+B'a_x xy, \quad 2(ya_{xy}+xa_{yy})=-2a_x+Bx+B'a_y xy,$$

$$a_{xx}+a_{yy}=1-B. \tag{2.6}$$

Отсюда

$$a_{xx}=\frac{B(y^2-x^2)+2(xa_x-ya_y)+B'xy(ya_x-xa_y)+2x^2(1-B)}{2(x^2+y^2)},$$

$$a_{xy}=\frac{B'xy(ya_y+xa_x)-2xy-2(ya_x+xa_y)}{2(x^2+y^2)},$$

$$a_{yy}=\frac{B(x^2-y^2)+2(ya_y-xa_x)+B'xy(xa_y-ya_x)+2y^2(1-B)}{2(x^2+y^2)}.$$

Вычисляя смешанные производные и приравнивая их, получаем, что система (2.6) совместна, если $B = 2/3$. В этом случае уравнение первого порядка в системе (2.5) имеет вид $3(ya_x + xa_y) = xy$. Выписываем для него систему уравнений характеристик, выбрав a в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристики

$$\frac{dx}{da} = \frac{3}{x}, \quad \frac{dy}{da} = \frac{3}{y}, \quad \text{отсюда} \quad a = \frac{x^2 + y^2}{12}.$$

В результате находим частное решение уравнения Пуассона с правой частью $f(x, y) = xy$, имеющее вид $u = [xy(x^2 + y^2)]/12$.

§ 3. Решение уравнения конвекции–диффузии

Рассмотрим уравнение

$$\varphi_t + (v_1 - k_x)\varphi_x + (v_2 - k_y)\varphi_y + (v_3 - k_z)\varphi_z - k(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = f(x, y, z, t). \tag{3.1}$$

Здесь (см. [13]) $k(x, y, z)$ — коэффициент диффузии, $f(x, y, z, t)$ — плотность конвективного переноса, $\bar{v} = \{v_1(x, y, z, t), v_2(x, y, z, t), v_3(x, y, z, t)\}$ — вектор скорости, удовлетворяющий условию $(v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z = 0$, φ — неизвестная функция. Нижние буквенные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Полагая, что $\varphi = \varphi(f)$, будем иметь $\varphi_x = \varphi' f_x$, $\varphi_y = \varphi' f_y$, $\varphi_z = \varphi' f_z$, $\varphi_t = \varphi' f_t$, $\varphi_{xx} = \varphi'' f_x^2 + \varphi' f_{xx}$, $\varphi_{yy} = \varphi'' f_y^2 + \varphi' f_{yy}$, $\varphi_{zz} = \varphi'' f_z^2 + \varphi' f_{zz}$. Подставив соответствующие выражения в (3.1), придем к уравнению

$$k\varphi''(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) + \varphi'[f_t + (v_1 - k_x)f_x + (v_2 - k_y)f_y + \\ + (v_3 - k_z)f_z - k(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})] = f. \tag{3.2}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по переменной f.

Если

$$k(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) = g_1(f), \quad f_t + (v_1 - k_x)f_x + (v_2 - k_y)f_y + \\ + (v_3 - k_z)f_z - k(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) = g_2(f), \tag{3.3}$$

то уравнение (3.2) представится в виде

$$\varphi'' g_1 + \varphi' g_2 = f, \tag{3.4}$$

и решение уравнения (3.1) сведется к решению (3.4) и подстановке выражения $f(x, y, z, t)$ вместо f.

Пример 5. Пусть $k = (x + y + z)^2/3$, $v_1 = y/t$, $v_2 = z/t$, $v_3 = x/t$. Тогда вектор $\bar{v}$ удовлетворяет выписанному для него условию. Запишем для этого примера уравнение (3.1):

$$\varphi_t + \left(\frac{y}{t} - \frac{2(x + y + z)}{3}\right)\varphi_x + \left(\frac{z}{t} - \frac{2(x + y + z)}{3}\right)\varphi_y + \\ + \left(\frac{x}{t} - \frac{2(x + y + z)}{3}\right)\varphi_z - \frac{(x + y + z)^2}{3}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = f.$$

Если $f = -(x + y + z)/t$, то $g_1 = f^2$, $g_2 = -2f$ (см. (3.3)) и уравнение (3.4) имеет вид $\varphi'' f^2 - 2\varphi' f = f$. Отсюда получаем $\varphi = \eta f^3/3 - 0.5f + \zeta$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$. Подставив $f = -(x + y + z)/t$, находим решение уравнения (3.1):

$$\varphi = \frac{x + y + z}{2t} - \frac{\eta(x + y + z)^3}{3t^3} + \zeta.$$

Если условия (3.3) для функции $f(x,y,z,t)$ не выполняются, рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_t+(v_1-k_x)\varphi_x+(v_2-k_y)\varphi_y+(v_3-k_z)\varphi_z=g(\varphi),$$
$$k(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz})=g(\varphi)-f. \tag{3.5}$$

Очевидно, что решения системы (3.5) будут решениями уравнения (3.1). Выпишем для первого уравнения системы (3.5) расширенную систему уравнений характеристик, выбрав φ за параметр, изменяющийся вдоль характеристики:

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{1}{g},\quad \frac{dx}{d\varphi}=\frac{v_1-k_x}{g},\quad \frac{dy}{d\varphi}=\frac{v_2-k_y}{g},\quad \frac{dz}{d\varphi}=\frac{v_3-k_z}{g},$$
$$\frac{d\varphi_t}{d\varphi}=\frac{g'\varphi_t-(v_1-k_x)_t\varphi_x-(v_2-k_y)_t\varphi_y-(v_3-k_z)_t\varphi_z}{g},$$
$$\frac{d\varphi_w}{d\varphi}=\frac{g'\varphi_w-(v_1-k_x)_w\varphi_x-(v_2-k_y)_w\varphi_y-(v_3-k_z)_w\varphi_z}{g}, \tag{3.6}$$
$$\frac{d\varphi_{ww}}{d\varphi}=-\varphi_{wt}\left(\frac{dt}{dg}\right)_w-\varphi_{wx}\left(\frac{dx}{dg}\right)_w-\varphi_{wy}\left(\frac{dy}{dg}\right)_w-$$
$$-\varphi_{wz}\left(\frac{dz}{dg}\right)_w+\left(\frac{d\varphi_w}{d\varphi}\right)_w,\quad (w=x,y,z),\quad g\neq 0.$$

Потребуем, чтобы второе уравнение системы (3.5) было первым интегралом системы (3.6):

$$\frac{d\varphi_{xx}}{d\varphi}+\frac{d\varphi_{yy}}{d\varphi}+\frac{d\varphi_{zz}}{d\varphi}=\left(\frac{g-f}{k}\right)_\varphi. \tag{3.7}$$

Получили замкнутую систему уравнений для определения $t(\varphi)$, $w(\varphi)$, $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_w(\varphi)$, $\varphi_{ww}(\varphi)$, $g(\varphi)$, $(w=x,y,z)$.

Пример 6. Пусть $v_1=v_2=v_3=8/3$, $k=x+y+z$, $f=18t(t+x+y+z)$. Для этого примера система (3.6), (3.7) имеет вид

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{1}{g},\quad \frac{dw}{d\varphi}=\frac{5}{3g},\quad \frac{d\varphi_t}{d\varphi}=\frac{g'\varphi_t}{g},\quad \frac{d\varphi_w}{d\varphi}=\frac{g'}{g}\varphi_w,$$
$$\frac{d\varphi_{ww}}{d\varphi}=\frac{g''}{g}\varphi_w^2+\frac{g'}{g}\varphi_{ww},\quad \left(\frac{g-f}{k}\right)_\varphi=\frac{g''}{g}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)+\frac{g'}{g}\left(\frac{g-f}{k}\right).$$

Тогда можно считать, что вдоль характеристики $w=5t/3$, $t=\int(d\varphi/g)$, $(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)=c^2g^2$, где $c=\mathrm{const}$. Учитывая выписанные зависимости, перепишем соотношение (3.7), получим

$$\frac{1}{5t^2}+\frac{108}{5g}+c^2gg''-\frac{108tg'}{5g}=0. \tag{3.8}$$

Решая уравнение (3.8) относительно $g(\varphi)$, если $c^2=1/12$, получаем $g=18\varphi^{2/3}$. При таком $g(\varphi)$ система (3.6), (3.7) совместна, и решение уравнения (3.1) сводится к решению первого уравнения системы (3.5). Для данного примера это уравнение имеет вид $\varphi_t+(5/3)(\varphi_x+\varphi_y+\varphi_z)=$ $=18\varphi^{2/3}$. Его решение $\varphi=(t+x+y+z)^3$ обращает в тождество уравнение (3.1) при заданных v_1, v_2, v_3, k.

Заключение

В работе приведены примеры, которые показывают, как описанный метод можно использовать для решения неоднородных нелинейных уравнений в частных производных. Метод применим к уравнениям любого порядка. Следует отметить, что при сведении уравнения в частных производных к замкнутой системе ОДУ систему уравнений характеристик нужно расширять до производных такого порядка, какой порядок решаемого уравнения.

Если уравнение порядка m не содержит производных первого порядка, а правая часть уравнения f не имеет отличных от нуля производных порядка n, то в качестве функции g можно, например, задать $g = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$.

Заметим, что данный подход к решению неоднородных уравнений позволяет оценить роль правой части уравнения в развитии процессов, описываемых уравнением. Если правая часть уравнения является поверхностью уровня решения, то именно она задает направление наиболее интенсивного развития процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старовойтова Р.П. Функции Грина. М.: Мир, 1982. 90 с.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
3. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 3. С. 313–322.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed. Boca Raton–London–New York: Chapman & Hall/CRC Press, 2012. 1912 p. DOI: 10.1201/b11412
5. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 209–225.
6. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 265–280.
7. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 5. С. 1091–1101.
8. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 238–246.
9. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. О решении некоторых уравнений нелинейной акустики // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 5. С. 576–582. DOI: 10.7868/S0320791915050159
10. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. О решении уравнения потенциала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 1. С. 130–145.
11. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
12. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
13. Короткий А.И. Реконструкция граничных режимов в моделях стационарной реакции конвекции–диффузии // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тез. докл. VII Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А. Ф. Сидорова. Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2014. С. 33–34.

Поступила в редакцию 03.07.2017

Рубина Людмила Ильинична, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
старший научный сотрудник, ученый секретарь, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: secretary@imm.uran.ru

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov

On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 355–364 (in Russian).

Keywords: nonhomogeneous partial differential equations, exact solutions, ODE, systems of ODEs.

MSC2010: 35C05, 35C99

DOI: 10.20537/vm170306

An approach to obtaining exact solutions for nonhomogeneous partial differential equations (PDEs) is suggested. It is shown that if the right-hand side of the equation specifies the level surface of a solution of the equation, then, in this approach, the search of solutions of considered nonhomogeneous differential equations is reduced to solving ordinary differential equation (ODE). Otherwise, searching for solutions of the equation leads to solving the system of ODEs. Obtaining a system of ODEs relies on the presence of the first derivatives of the sought function in the equation under consideration. For PDEs, which do not explicitly contain first derivatives of the sought function, substitution providing such terms in the equation is proposed. In order to reduce the original equation containing the first derivative of the sought function to the system of ODEs, the associated system of two PDEs is considered. The first equation of the system contains in the left-hand side only first order partial derivatives, selected from the original equation, and in the right-hand side it contains an arbitrary function, the argument of which is the sought unknown function. The second equation contains terms of the original equation that are not included in the first equation of the system and the right-hand side of the first equation in the system created. Solving the original equation is reduced to finding the solutions of the first equation of the resulting system of equations, which turns the second equation of the system into identity. It has been possible to find such solution using extended system of equations for characteristics of the first equation and the arbitrariness in the choice of function from the right-hand side of the equation. The described approach is applied to obtain some exact solutions of the Poisson equation, Monge–Ampere equation and convection–diffusion equation.

REFERENCES

1. Starovoitova R.P. *Funktsii Grina* (Green's functions), Moscow: Mir, 1982, 90 p.
2. Cole J.D. *Perturbation methods in applied mathematics*, London: Ginn-Blaisdell, 1968, 260 p. Translated under the title *Metody vozmushchenii v prikladnoi matematike*, Moscow: Mir, 1972, 276 p.
3. Kudryavtsev A.G., Sapozhnikov O.A. Determination of the exact solutions to the inhomogeneous Burgers equation with the use of the Darboux transformation, *Acoustical Physics*, 2011, vol. 57, issue 3, pp. 311–319. DOI: 10.1134/S1063771011030080
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of nonlinear partial differential equations*, 2nd edition, Boca Raton–London–New York: Chapman & Hall/CRC Press, 2012, 1912 p. DOI: 10.1201/b11412
5. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. A geometric method for solving nonlinear partial differential equations, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 209–225 (in Russian).
6. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. Solution of nonlinear partial differential equations by the geometric method, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 265–280 (in Russian).
7. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation, *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, issue 5, pp. 872–881. DOI: 10.1134/S0037446612050126
8. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. One method for solving systems of nonlinear partial differential equations, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 180–188. DOI: 10.1134/S0081543815020182
9. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On solving certain nonlinear acoustics problems, *Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, issue 5, pp. 527–533. DOI: 10.1134/S1063771015050152
10. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On solving the potential equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 261, suppl. 1, pp. 183–200. DOI: 10.1134/S0081543808050167
11. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2. Partial differential equations*, New York: Interscience, 1962, xxii + 830 p. Translated under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, Moscow: Mir, 1964, 830 p.
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya* (Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions), Moscow: Fizmatlit, 2002, 432 p.

13. Korotkii A.I. Reconstruction of boundary regimes in models of stationary reaction–convection–diffusion, *Aktual'nye problemy prikladnoi matematiki i mekhaniki: tez. dokl. VII Vserossiiskoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati akademika A. F. Sidorova* (Actual problems of applied mathematics and mechanics: abstracts of VII All-Russian conference dedicated to the memory of Academician A. F. Sidorov), N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 2014, p. 33–34 (in Russian).

Received 03.07.2017

Rubina Lyudmila Il'inichna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: rli@imm.uran.ru

Ul'yanov Oleg Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;
Senior Researcher, Academic Secretary, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: secretary@imm.uran.ru